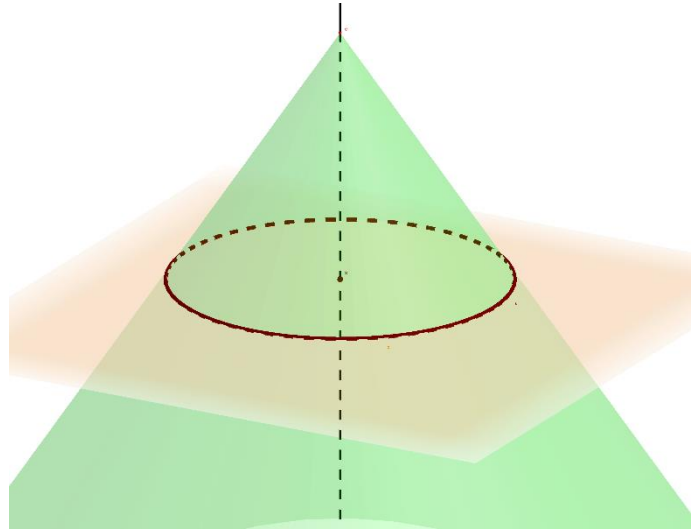
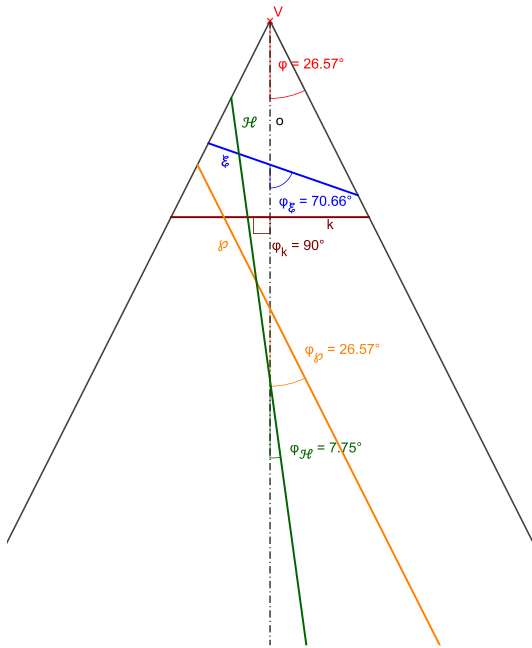


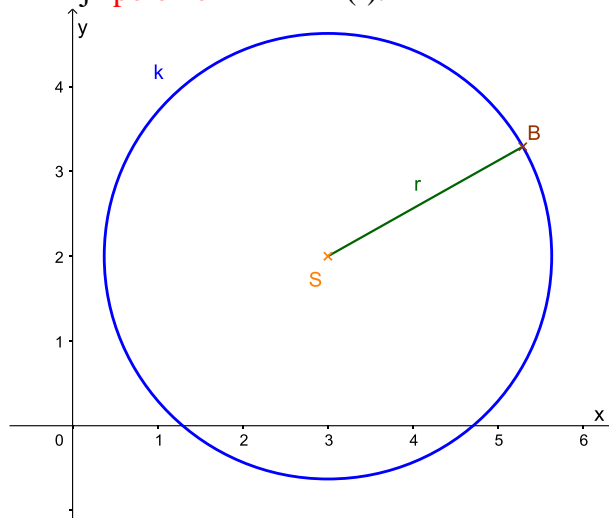
Kružnica

analytická geometria: kvadratický útvar, krivka druhého stupňa

euklidovská geometria: kužeľosečka (priemik kužeľovej plochy s rovinu) – rovina je kolmá na os kužeľovej plochy



D. Kružnica je množina bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od daného bodu je rovnaká. Ten daný bod je **stred kružnice (S)** a tá rovnaká vzdialenosť je **polomer kružnice (r)**.



Daná je kružnica stredom a polomerom: $S(u; v); r$

Pre ľubovoľný bod kružnice $B(x; y)$ platí:

$$|BS| = r$$

$$\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = r$$

umocnením dostaneme rovnicu kružnice:

$k: S(u; v); r$ – **stredová rovnica kružnice:**

$$k: (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$$

P. Ak kružnica je v základnej polohe, stredom kružnice je začiatok súradnicovej sústavy, potom stredová rovnica prejde do tvaru:

$$k: x^2 + y^2 = r^2$$

odstránime zátvorky, preniesieme všetko na jednu stranu, usporiadame → **všeobecná rovnica kružnice:**

$$k: A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0 \quad A; B; C; D; E \in \mathbb{R}$$

podmienka: $A = B \wedge C^2 + D^2 - 4AE > 0$

$$k: \left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{D}{2A}\right)^2 = \frac{C^2 + D^2 - 4AE}{4A^2}$$

$$S\left(\frac{-C}{2A}; \frac{-D}{2A}\right)$$

$$r = \sqrt{\frac{C^2 + D^2 - 4AE}{4A^2}} = \frac{\sqrt{C^2 + D^2 - 4AE}}{2A}$$

parametrická rovnica kružnice:

$$k: x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

$$\varphi \in (0; 2\pi)$$

príklad:

Napište středový tvar rovnice kružnice a ten upravte na všeobecný tvar rovnice kružnice, ak je dané:

a, $S(-3; 5); r = 7$

b, $S(9; -4); r = 5$

c, $S(0; 2); r = 9$

d, $S(0; 0); r = 10$

a, $(x - (-3))^2 + (y - 5)^2 = 7^2$

k: $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 49 \quad /-49$$

k: $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$

b, $(x - 9)^2 + (y - (-4))^2 = 5^2$

l: $(x - 9)^2 + (y + 4)^2 = 25$

$$x^2 - 18x + 81 + y^2 + 8y + 16 = 25 \quad /-25$$

l: $x^2 + y^2 - 18x + 8y + 72 = 0$

c, $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 9^2$

m: $x^2 + (y - 2)^2 = 81$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 81 \quad /-81$$

m: $x^2 + y^2 - 4y - 77 = 0$

d, $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 10^2$

n: $x^2 + y^2 = 100 \quad /-100$

n: $x^2 + y^2 - 100 = 0$

Napište rovnice kružnice v středovom tvare a určte súradnice stredy S a veľkosť polomeru r :

a, $x^2 + y^2 - 8x - 20 = 0$

b, $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 18 = 0$

c, $3x^2 + 3y^2 - 7x + 5y + 6 = 0$

a, preusporiadame: x-ové členy, y-ové členy a číslo na druhú stranu

$$x^2 - 8x + y^2 = 20$$

doplníme na úplný štvorec (na druhú mocninu dvojčlena)

$$(x^2 - 8x) + y^2 = 20$$

$$(x^2 - 8x + 16) + y^2 = 20 + 16$$

k: $(x - 4)^2 + y^2 = 36$

S(4; 0); r = 6

b, $x^2 + 10x + y^2 - 6y = -18$

$$(x^2 + 10x) + (y^2 - 6y) = -18$$

$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 6y + 9) = -18 + 25 + 9$$

l: $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$

S(-5; 3); r = 4

c, $3x^2 - 7x + 3y^2 + 5y = -6$

vyjmeme koeficient kvadratickeho člena

$$3\left(x^2 - \frac{7}{3}x\right) + 3\left(y^2 + \frac{5}{3}y\right) = -6$$

$$3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \left(-\frac{7}{6}\right)^2\right) + 3\left(y^2 + \frac{5}{3}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) = -6 + 3 \cdot \left(-\frac{7}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36}\right) + 3\left(y^2 + \frac{5}{3}y + \frac{25}{36}\right) = -6 + 3 \cdot \frac{49}{36} + 3 \cdot \frac{25}{36}$$

$$3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + 3\left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$S\left(\frac{7}{6}; -\frac{5}{6}\right); r = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Kružnica má stred v bode S a prechádza bodom B. Napíšte jej všeobecný tvar: S(11; -7), B(5; 3)

$$r = |BS| = \sqrt{(5 - 11)^2 + (3 - (-7))^2} = \sqrt{(-6)^2 + 10^2} = \sqrt{136}$$

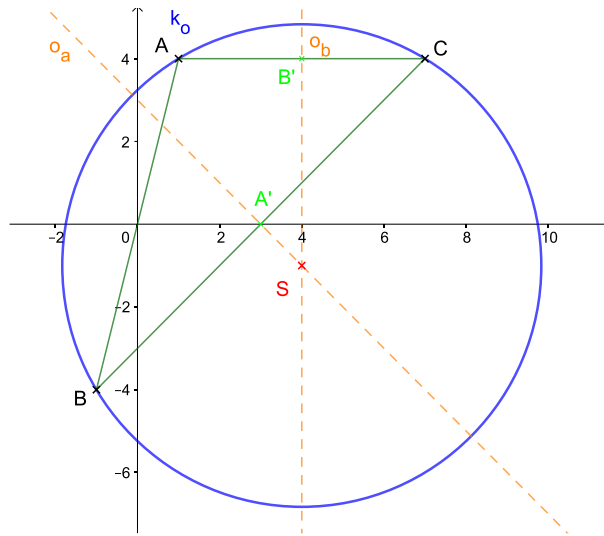
$$k: (x - 11)^2 + (y + 7)^2 = 136$$

$$x^2 - 22x + 121 + y^2 + 14y + 49 = 136$$

$$k: x^2 + y^2 - 22x + 14y + 34 = 0$$

Napíšte rovnicu kružnice prechádzajúcej tromi bodmi: A(1; 4), B(-1; -4), C(7; 4)

stredom opísanej kružnice je priesečník osí strán



$$A' = \frac{B+C}{2} = (3; 0)$$

$$\vec{n}_{o_a} = \vec{BC} = C - B = (8; 8) \sim (1; 1)$$

$$o_a: 1 \cdot x + 1 \cdot y + c = 0$$

$$A' \in o_a$$

$$1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + c = 0$$

$$c = -3$$

$$o_a: x + y - 3 = 0$$

$$B' = \frac{A+C}{2} = (4; 4)$$

$$\vec{n}_{o_b} = \vec{AC} = C - A = (6; 0) \sim (1; 0)$$

$$o_b: 1 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$$

$$B' \in o_b$$

$$1 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + c = 0$$

$$c = -4$$

$$o_b: x - 4 = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

$$4 + y - 3 = 0$$

$$1 + y = 0$$

$$y = -1$$

$$S(4; -1)$$

$$r = |AS| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

$$k: (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 34$$